

LES HYPERCARTES PLANAIRES SONT DES ARBRES TRES BIEN ETIQUETES

Didier ARQUES

Université de Haute-Alsace, 68093 Mulhouse Cedex, France

Received 17 July 1984

Revised 21 March 1985

R. Cori and B. Vauquelin have constructed (cf [1]) a one to one correspondence from rooted planar maps onto rooted well-labeled trees (trees whose vertices are labeled with natural numbers that differ by at most one on adjacent vertices). This correspondence does not associate other families of planar maps (e.g. planar hypermaps, ...) and easily definable families of trees. The main result of this paper (Theorem 1, Section II) is to construct a new one to one correspondence from rooted planar maps onto rooted well-labeled trees which also associates rooted planar hypermaps with n edge-ends (called 'brin' in French) and rooted very well-labeled trees (well labeled trees whose adjacent vertices have not the same label) with n edges. This last result is given in Section 3, Theorem 2.

The coding of rooted very well-labeled trees by words extending Dyck's words (or parenthesis systems), allows their enumeration, hence the enumeration of rooted planar hypermaps. This side is the subject of a work in progress under B. Vauquelin.

Introduction

Dans [1], R. Cori et B. Vauquelin ont construit une bijection entre les cartes planaires pointées et les arbres bien étiquetés pointés. Cette bijection ne met pas en correspondance certaines autres familles de cartes planaires (hypercartes planaires, ...) avec des familles d'arbres facilement caractérisables. Le principal résultat de cet article est d'établir une nouvelle bijection entre cartes planaires pointées et arbres bien étiquetés pointés (Théorème 1 du II), qui permet de mettre en correspondance les hypercartes planaires pointées à n brins et les arbres très bien étiquetés pointés à n arêtes (Théorème 2 du III).

Le codage des arbres très bien étiquetés par des mots généralisant les mots de Dyck, permet leur énumération et donc permet le décompte des hypercartes planaires pointées. Cet aspect fait l'objet d'un travail en cours par B. Vauquelin.

1. Définitions

Les notations et définitions rappelées ci-dessous sont celles introduites par R. Cori et B. Vauquelin dans [1].

1.1. Cartes combinatoires

Soit Z_m , l'ensemble des entiers non nuls de module maximum m .

$$Z_m = \{-m, \dots, -1, 1, \dots, m\}.$$

On note α l'involution sans point fixe définie sur Z_m par

$$\alpha(i) = -i.$$

Pour σ permutation sur Z_m , on note $Z(\sigma)$ le nombre de cycles de σ et $\bar{\sigma}$ la permutation sur Z_m définie par $\bar{\sigma} = \sigma \circ \alpha$.

Une carte combinatoire à m arêtes est une permutation σ sur Z_m telle que le couple (σ, α) engendre un groupe transitif sur Z_m .

On appelle *sommets* (resp. *faces*, *arêtes*) de la carte combinatoire (σ, α) , les cycles de σ (resp. $\bar{\sigma}$, α). Les éléments de Z_m sont appelés les *brins* de la carte. Une paire de brins $(i, -i)$ est une arête de la carte (cycle pour α).

Le genre $g(\sigma, \alpha)$ d'une carte (σ, α) sur Z_m est défini par

$$g(\sigma, \alpha) = \frac{1}{2}\{m + 2 - Z(\sigma) - Z(\bar{\sigma})\}.$$

Le genre d'une carte combinatoire est un entier non négatif. S'il est nul, la carte est plane.

1.2. Arbres

Une carte plane à une seule face ($Z(\bar{\sigma}) = 1$) est un arbre. Un arbre étiqueté est un arbre dans lequel chaque sommet est étiqueté par un entier naturel. L'arbre est dit bien étiqueté si le sommet initial du brin 1 (cycle de σ engendré par 1) est étiqueté 0 et si deux sommets adjacents ont des étiquettes différant au plus d'une unité. Un arbre est dit très bien étiqueté si de plus, deux sommets adjacents n'ont pas la même étiquette.

On note $\varepsilon(s)$ (resp. $\varepsilon(b)$) l'étiquette du sommet s (resp. du sommet initial du brin b) et $(\sigma, \alpha; \varepsilon)$ un arbre (σ, α) étiqueté par ε .

1.3. Représentation d'une carte combinatoire

Soit (σ, α) une carte combinatoire sur Z_m . On représente les cycles $(a, \sigma(a), \dots, \sigma^k a)$ de σ par des points situés dans cet ordre sur un cercle pour un sens de rotation choisi. On joint alors les points étiquetés a et $-a$ par une arête.

Par exemple, la carte combinatoire définie sur Z_{11} par

$$\begin{aligned} \sigma = (1, 2, -2, 3, 4, 5)(-1, 11, 10, -3) \\ (-11, 6, -4, 7)(-6, -5)(-7, 8, 9, -8, -10)(-9) \end{aligned}$$

est représentée, en contractant chaque cercle défini ci-dessus en un point et en notant ces six sommets de s_1 à s_6 (Fig. 1). Le sens de rotation choisi pour représenter les cycles de σ est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

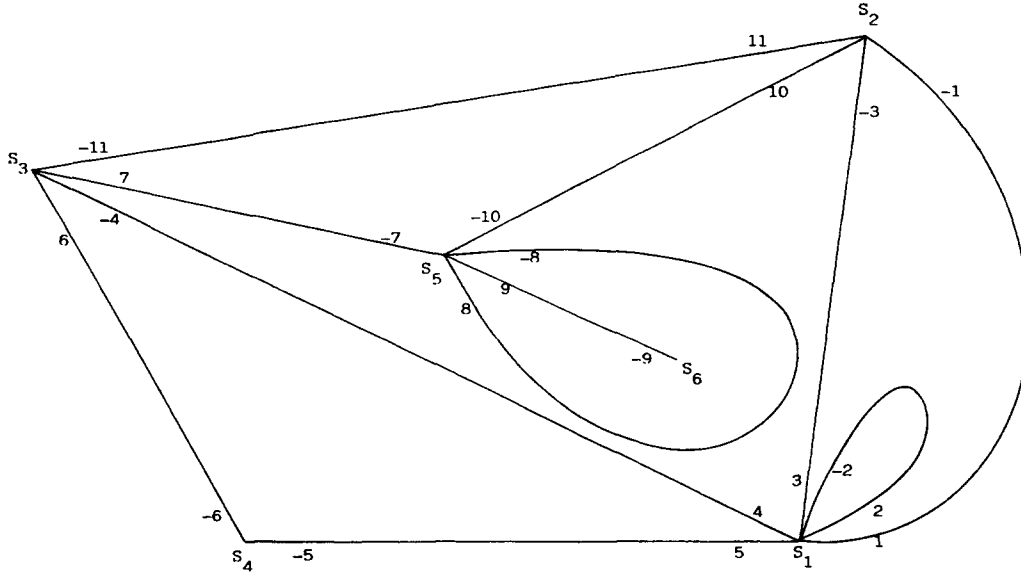


Fig. 1

On a, $\bar{\sigma} = (1, 11, 6, -5)(2, 3, -1)(-2)(4, 7, 8, -10, -3)(5, -6, -4)(-7, -11, 10)(-8, 9, -9)$. On note respectivement de f_1 à f_7 les 7 faces de cette carte dans la suite.

1.4. Cartes planaires pointées

Deux cartes planaires (σ, α) et (σ', α) sur Z_m sont isomorphes s'il existe une permutation φ sur Z_m telle que

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi\sigma\varphi^{-1} = \sigma', \quad \varphi\alpha = \alpha\varphi.$$

Une carte planaire pointée est une classe d'équivalence modulo cet isomorphisme. Le brin 1 et son sommet initial sont dits pointés.

Un arbre étiqueté pointé est une classe, dans l'ensemble des arbres étiquetés, pour la relation d'isomorphisme définie ci-dessus, à laquelle on impose de plus de préserver l'étiquetage: $\varepsilon = \varepsilon\varphi$.

2. Bijection entre cartes planaires pointées et arbres bien étiquetés pointés

2.1. Notations

Soit σ une permutation sur A , et B un sous-ensemble de A .

σ^*B est le plus petit sous-ensemble de A , contenant B , et stable par σ .

Pour b dans B , $\sigma|_B(b)$ est le premier brin dans B parmi $\sigma(b)$, $\sigma^2(b)$, \dots .

2.2. Construction de l'arbre bien étiqueté associé à une carte

Soit (σ, α) une carte planaire sur Z_m . On associe à cette carte, un arbre $\hat{\sigma}$ sur Z_m et un étiquetage ε de cet arbre de façon à ce que l'application $(\sigma, \alpha) \rightarrow$

$(\hat{\sigma}, \alpha; \varepsilon)$ soit une bijection de l'ensemble des cartes planaires sur l'ensemble des arbres bien étiquetés.

2.2. a Définition de ε

Soit s un sommet de la carte planaire (σ, α) de sommet pointé $s_1 = \sigma^*\{1\}$. Soit $\varepsilon(s)$, la longueur (nombre d'arêtes) d'un plus court chemin joignant s_1 à s (en particulier $\varepsilon(s_1) = 0$). Les brins issus d'un sommet étiqueté i sont donc étiquetés i . Si n est la plus grande distance d'un sommet de la carte au sommet pointé, on note B_i , $0 \leq i \leq n$, l'ensemble des brins de la carte étiquetés i . Ces ensembles B_i sont stables par σ .

Dans notre exemple (cf. Fig. 1)

$$\varepsilon(s_1) = 0, \varepsilon(s_2) = \varepsilon(s_3) = \varepsilon(s_4) = 1, \varepsilon(s_5) = 2, \varepsilon(s_6) = 3.$$

$$B_0 = \{1, 2, -2, 3, 4, 5\}, B_1 = \{-1, 11, 10, -3, -11, 6, -4, 7, -6, -5\},$$

$$B_2 = \{-7, 8, 9, -8, -10\}, B_3 = \{-9\}.$$

Remarque 1. Si pour la fonction d'étiquetage ε , tous les brins d'un même sommet ont nécessairement la même étiquette, l'ensemble des étiquettes des brins d'une même face peut constituer un intervalle quelconque inclus dans $[0, n]$. (Cf. Remarque 5, en fin d'article pour une justification intuitive du choix de la définition de ε .)

Pour mémoire, à la différence de cet étiquetage, celui utilisé par Cori et Vauquelin dans [1], traite les faces et les sommets de façon symétrique. En effet, après avoir étiqueté 0 les brins de la face extérieure $\bar{\sigma}^*\{1\}$, on étiquette dans [1], alternativement impair et pair respectivement l'ensemble des sommets puis l'ensemble des faces 'atteints' par la fonction d'étiquetage et non encore complètement étiquetés. Tout sommet (resp. face) a alors les étiquettes de ses brins dans un intervalle du type $[2i, 2i + 1]$ (resp. $[2i + 1, 2i + 2]$).

La définition de $\hat{\sigma}$, alors donnée dans [1], comme restriction de σ (resp. $\bar{\sigma}$) à $\bigcup_{i \geq 0} B_{2i}$ (resp. $\bigcup_{i \geq 0} B_{2i+1}$), diffère de celle donnée ci dessous, associée à une partition, essentielle dans la suite, de chaque ensemble B_i en deux sous-ensembles F_i et S_i .

2.2. b. Définition de $\hat{\sigma}$ sur Z_m

A chaque face λ (cycle de $\bar{\sigma}$) de la carte donnée, on associe $m(\lambda)$: valeur minimum des étiquettes des brins définissant cette face.

Pour i appartenant à $\{0, \dots, n\}$, F_i est alors l'ensemble des brins b de B_i dont l'étiquette i est égale à $m(\bar{\sigma}^*\{b\})$ (valeur minimum des étiquettes des brins de la face engendrée par b). On pose également $S_i = B_i \setminus F_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

On définit alors pour i dans $\{0, \dots, n\}$

$$\hat{\sigma}(a) = \sigma|_{S_i}(a), \quad \text{si } a \text{ est dans } S_i$$

$$\hat{\sigma}(a) = \bar{\sigma}|_{F_i}(a), \quad \text{si } a \text{ est dans } F_i.$$

Théorème 1 (1) $(\hat{\sigma}, \alpha)$ muni de l'étiquetage défini par ε est un arbre bien étiqueté.

(2) L'application T définie ci-dessus qui à (σ, α) associe $(\hat{\sigma}, \alpha; \varepsilon)$ est une bijection de l'ensemble des cartes planaires sur l'ensemble des arbres bien étiquetés. Cette bijection conserve les arêtes. Elle donne par passage au quotient une bijection \tilde{T} de l'ensemble des cartes planaires pointées sur l'ensemble des arbres bien étiquetés pointés.

Remarque 2. En conséquence des définitions de ε et $\hat{\sigma}$, il apparaîtra dans la reconstruction d'une carte planaire à partir de l'arbre bien étiqueté associé (cf. Lemmes 2 et 4 ci-dessous), que la bijection T induit une correspondance bijective:

d'une part entre les faces de la carte planaire et les sommets de l'arbre associé qui sont des minimum locaux pour la fonction d'étiquetage (ce sont les sommets de l'arbre bien étiqueté associé dont l'étiquette est inférieure ou égale à celles de son père et de ses fils éventuels dans l'arbre);

et d'autre part entre les sommets (autres que le sommet pointé) de la carte planaire, et les sommets de l'arbre bien étiqueté associé qui ne sont pas des minimum locaux.

Par ailleurs, dans la bijection donnée dans [1], les sommets (resp. faces autres que la face $\hat{\sigma}^*(1)$) de la carte planaire, sont en bijection avec les sommets étiquetés pairs (resp. impairs) dans l'arbre bien étiqueté associé.

Si l'on compose la bijection T définie ci-dessus avec l'opération classique de dualité dans les cartes planaires (cf [2]), on déduit alors de ces deux résultats, qu'il existe une bijection interne aux arbres bien étiquetés pointés, qui échange pour deux arbres associés, les sommets pairs (resp. impairs) du premier et les sommets minimum (resp. non minimum) locaux du second. Une telle bijection, sans passage intermédiaire par les cartes planaires, reste à construire.

Dans notre exemple, on obtient:

$$m(f_1) = m(f_2) = m(f_3) = m(f_4) = m(f_5) = 0, \quad m(f_6) = 1, \quad m(f_7) = 2;$$

$$F_0 = B_0, \quad F_1 = \{-11, 10\}, \quad F_2 = \{-8, 9\}, \quad F_3 = \emptyset;$$

$$S_0 = \emptyset \text{ (c'est toujours le cas)}, \quad S_1 = \{-1, 11, -3, 6, -4, 7, -6, -5\},$$

$$S_2 = \{-7, 8, -10\}, \quad S_3 = \{-9\};$$

$$\bar{\sigma}|_{F_0} = (1)(2, 3)(-2)(4)(5), \quad \bar{\sigma}|_{F_1} = (-11, 10), \quad \bar{\sigma}|_{F_2} = (-8, 9);$$

$$\sigma|_{S_1} = (-1, 11, -3)(6, -4, 7)(-6, -5), \quad \sigma|_{S_2} = (-7, 8, -10), \quad \sigma|_{S_3} = (-9).$$

Donc $\hat{\sigma} = (1)(2, 3)(-2)(4)(5)(-11, 10)(-8, 9)(-1, 11, -3)(6, -4, 7)(-6, -5)(-7, 8, -10)(-9)$, l'étiquetage des brins de $\hat{\sigma}$ étant le même que celui de la carte σ , ce qui donne l'arbre dans lequel l'étiquetage est donné par les chiffres entourés d'un cercle (Fig. 2).

La démonstration de l'existence de la bijection T et de ses propriétés résulte des quatre lemmes démontrés ci-dessous. Aux techniques mises en place par Cori

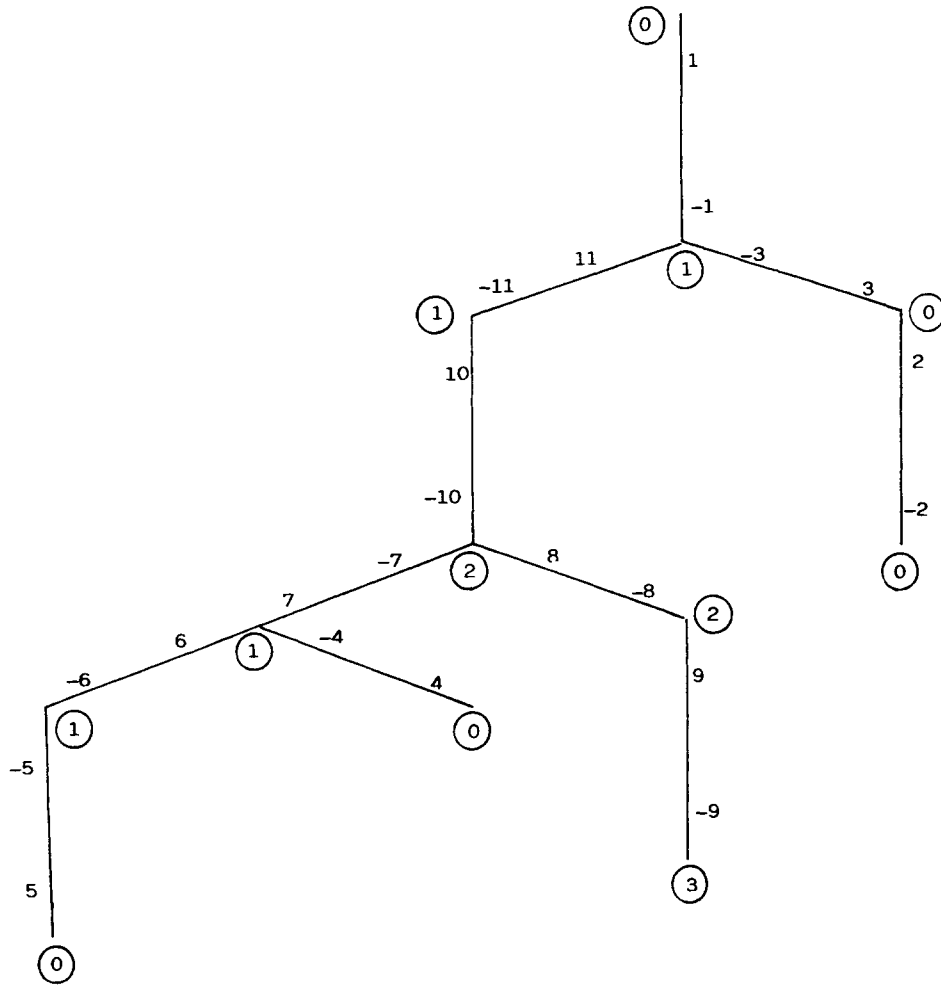


Fig. 2

et Vauquelin, s'ajoutent ou se substituent d'une part celles résultant directement du choix de la fonction d'étiquetage ε en tant que distance au sommet pointé (cf par exemple, le calcul du nombre de cycles de $\hat{\sigma}$ dans $\bigcup_{i \geq 1} S_i$ au Lemme 2, et la caractérisation des ensembles F_i au Lemme 4), et d'autre part les difficultés supplémentaires, dues à la partition, pour $i \geq 0$, de B_i en deux sous-ensembles F_i et S_i (cf par exemple la démonstration du Lemme 1 et celle de l'injectivité de T , au Lemme 4, qui nécessite de reconstruire, pour $i \geq 0$, les ensembles S_i , F_i , $\bar{\sigma}^*(F_i)$, à partir de l'arbre bien étiqueté associé).

Lemme 1. $(\hat{\sigma}, \alpha)$ est une carte

Démonstration. Il faut montrer que le groupe \hat{G} engendré par $\{\hat{\sigma}, \alpha\}$ est transitif sur Z_m . Il suffit de prouver que pour tous a et b dans Z_m tels que $a = \sigma(b)$, il existe un élément g du groupe \hat{G} tel que $a = g(b)$ (on utilise le fait que $\{\sigma, \alpha\}$ agit transitivement sur Z_m).

Remarque préliminaire. F_n est stable par $\bar{\sigma}$; en effet, si une face λ est telle que $m(\lambda) = n$, alors tous ses brins ont une étiquette minorée par n , par définition de $m(\lambda)$, et majorée par n , par définition de n . Donc tous les brins de cette face (cycle pour $\bar{\sigma}$) sont dans F_n .

Cas 1. Si a est dans B_n , et donc b dans B_n (stable par σ):

(a) Si a est dans F_n , on a $-b = -\sigma^{-1}(a) = \bar{\sigma}^{-1}(a)$ est dans F_n donc par définition de $\hat{\sigma}$, $-b = \hat{\sigma}^{-1}(a)$, soit $a = \hat{\sigma} \circ \alpha(b)$;

(b) Si a est dans S_n . Posons $b_1 = b$, $b_2 = \sigma^{-1}(b_1)$, \dots , $b_p = \sigma^{-1}(b_{p-1})$, où b_p est le premier brin de cette suite qui est dans S_n , les précédents étant dans F_n . Alors, par définition de $\hat{\sigma}$, $a = \hat{\sigma}(b_p)$ ($= \sigma|_{S_n}(b_p)$).

D'autre part, pour $1 \leq l < p$, $b_l = \sigma(b_{l+1})$ avec b_l dans F_n . Donc d'après le Cas 1.a il existe g_l dans \hat{G} tel que $b_l = g_l(b_{l+1})$ et donc $b = b_1 = g_1 g_2 \cdots g_{p-1} \hat{\sigma}^{-1}(a)$, d'où a en fonction de b .

Cas 2. Supposons par récurrence avoir démontré le résultat pour tous brins a et b tels que $a = \sigma(b)$ et que a ait une étiquette supérieure à i . Supposons alors a dans B_i , et donc b dans B_i (stable par σ).

(a) Si a est dans F_i , tous les brins de la face $\bar{\sigma}^*(a)$ sont dans F_i ou dans $\bigcup_{j>i} S_j$. Posons $b_1 = -b = \bar{\sigma}^{-1}(a)$, $b_2 = \bar{\sigma}^{-1}(b_1)$, \dots , $b_p = \bar{\sigma}^{-1}(b_{p-1})$ où b_p est le premier brin dans F_i , les autres étant dans $\bigcup_{j>i} S_j$. Alors, par définition de $\hat{\sigma}$ sur F_i , $a = \hat{\sigma}(b_p)$. De plus, pour $1 \leq l < p$, $b_l = \bar{\sigma}(b_{l+1})$ avec b_l dans $\bigcup_{j>i} S_j$.

Donc par hypothèse de récurrence, il existe g_l , $1 \leq l < p$, dans \hat{G} tels que $-b = b_1 = g_1 g_2 \cdots g_{p-1} \hat{\sigma}^{-1}(a)$, d'où a en fonction de b .

(b) Si a est dans S_i , la démonstration est la même qu'au Cas 1.b en remplaçant n par i . \square

Lemme 2. $(\hat{\sigma}, \alpha)$ est un arbre.

Démonstration. Déterminons le nombre de cycles de $\hat{\sigma}$:

(a) $F = \bigcup_{i \geq 0} F_i$ est stable par $\hat{\sigma}$ (par définition de $\hat{\sigma}$) et, $Z(\hat{\sigma}|_F) = Z(\bar{\sigma})$. En effet $\hat{\sigma}$ est définie sur F en associant à chaque face (cycle de $\bar{\sigma}$) un cycle pour $\hat{\sigma}$;

(b) $S = \bigcup_{i \geq 1} S_i$, ($S_0 = \emptyset$), est stable par $\hat{\sigma}$.

Le sommet pointé a tous ses brins étiquetés 0 et donc (évident) a tous ses brins dans F . C'est le seul. Tout autre sommet (cycle pour σ non étiqueté 0) possède au moins un brin qui soit dans S . En effet, soit s un sommet inclus dans F_i , étiqueté i non nul, s_1 un sommet adjacent à s , et $(b_1, -b_1)$ une arête liant s_1 (sommet initial de b_1) à s : Le brin $b = \bar{\sigma}(b_1) = \sigma(-b_1)$, est un brin de s , donc appartient à F_i . Par suite b_1 (et donc s_1), qui appartient à la même face que b , est étiqueté j supérieur ou égal à i .

On a donc démontré que tout sommet adjacent au sommet s , a une étiquette supérieure ou égale à i . Le sommet s devrait donc (du fait de la notion de distance utilisée pour étiqueter les sommets) être étiqueté $i+1$; c'est une contradiction. Le sommet s ne peut donc pas être inclus dans F_i (i non nul). Par suite, la définition de $\hat{\sigma}$ entraîne que $Z(\hat{\sigma}|_S) = Z(\sigma) - 1$.

(c) On déduit du (a) et du (b) que $Z(\hat{\sigma}) = Z(\sigma) + Z(\bar{\sigma}) - 1$. Or, $g(\hat{\sigma}, \alpha) = \frac{1}{2}(2 + m - Z(\hat{\sigma}) - Z(\bar{\sigma}))$. Donc

$$g(\hat{\sigma}, \alpha) = g(\sigma, \alpha) + \frac{1}{2}(1 - Z(\bar{\sigma})) = \frac{1}{2}(1 - Z(\bar{\sigma}))$$

et $g(\hat{\sigma}, \alpha)$ doit être un entier naturel. Donc $Z(\hat{\sigma}) - 1$. et par suite, $g(\hat{\sigma}, \alpha) = 0$.
Donc, $(\hat{\sigma}, \alpha)$ est une carte planaire et un arbre. \square

Lemme 3. $(\hat{\sigma}, \alpha)$ est bien étiqueté par ε .

Démonstration. C'est évident par la définition de ε . \square

Lemme 4. L'application qui à la carte planaire (σ, α) fait correspondre l'arbre bien étiqueté $(\hat{\sigma}, \alpha; \varepsilon)$ est une bijection. Elle induit par passage au quotient une bijection de l'ensemble des cartes planaires pointées sur l'ensemble des arbres bien étiquetés pointés.

Démonstration.

Remarque 3. On utilise dans la démonstration ci-dessous, le lemme technique introduit dans [1].

Lemme. Soient A' et A'' deux ensembles disjoints de réunion A . Soit φ une injection de A' dans A , sans cycle dans A' (c'est-à-dire une suite a_1, \dots, a_p dans A' telle que pour $1 \leq i < p$, $\varphi(a_i) = a_{i+1}$ et $\varphi(a_p) = a_1$). Soit α une permutation de A'' . Alors, il existe une unique permutation θ sur A telle que:

$$\theta|_{A''} = \alpha;$$

$$\theta(a) = \varphi(a), \text{ pour } a \text{ dans } A'.$$

On note $\theta = T_{A'', A'}(\alpha, \varphi)$.

(1) Pour prouver l'injectivité, nous allons montrer que (σ, α) est uniquement déterminée par son image $(\hat{\sigma}, \alpha)$ étiquetée par ε .

La difficulté essentielle qui apparaît ici, dans la reconstruction de la carte planaire (σ, α) à l'aide du lemme précédent, consiste à reconstruire les ensembles S_i , F_i et $\bar{\sigma}^*(F_i)$, $i \geq 0$, à partir de l'arbre bien étiqueté associé $(\hat{\sigma}, \alpha; \varepsilon)$. (Cette difficulté n'existe pas dans [1], où le rôle des ensembles S_i et F_i dans la reconstruction est joué par les ensembles B_{2i} et B_{2i+1} , avec $\sigma^*(B_{2i}) = B_{2i} \cup B_{2i+1}$ et $\bar{\sigma}^*(B_{2i+1}) = B_{2i+1} \cup B_{2i+2}$, cf Remarque 1.)

(a) Les ensembles B_i , $0 \leq i \leq n$, sont déterminés par $a \in B_i \Leftrightarrow \varepsilon(a) = i$.

(b) Détermination des ensembles F_i et S_i .

Ces ensembles F_i et S_i sont stables par $\hat{\sigma}$; ce sont donc des réunions de sommets de l'arbre, étiquetés i .

Pour i dans $\{0, \dots, n\}$, $S_i = B_i \setminus F_i$ et F_i est l'ensemble des sommets étiquetés i de l'arbre dont les sommets adjacents dans l'arbre sont étiquetés $j \geq i$.

Démontrons cette caractérisation de F_i .

• Soit (b_1, \dots, b_k) une face f , cycle pour $\bar{\sigma}$, telle que le sous-cycle $(b_{i_1}, \dots, b_{i_r})$ soit un sommet \hat{s} de $\hat{\sigma}$ inclus dans F_i (on a $m(f) = i$). Alors, pour l dans $\{1, \dots, r\}$, $\sigma(-b_{i_l}) = \bar{\sigma}(b_{i_l}) = b_{i_{l+1}}$ (ou b_1 si $i_l = k$) par suite, $\varepsilon(-b_{i_l}) = \varepsilon(b_{i_{l+1}}) \geq$

$m(f) = i$. Donc les sommets adjacents au sommet \hat{s} dans l'arbre ont des étiquettes supérieures ou égales à i .

• Réciproque: Pour $i > 0$, supposons par l'absurde qu'un sommet $s = (b_1, \dots, b_k)$, cycle pour σ , soit tel que la sous suite de brins $(b_{i_1}, \dots, b_{i_r})$ soit un sommet \hat{s} de $\hat{\sigma}$ dans S_i , dont les sommets adjacents dans l'arbre ont des étiquettes supérieures ou égales à i . Alors pour $l = 1, \dots, r$, $\varepsilon(-b_{i_l}) \geq i$. De plus si b est dans $s \setminus \hat{s}$, b est nécessairement dans F_i . Donc, $b' = \bar{\sigma}(b)$ est étiqueté $j \geq i$. Par suite $\varepsilon(-b) = \varepsilon(b') = j \geq i$.

On a donc montré que pour tout b dans s , $\varepsilon(-b) \geq i$. Donc s ne peut pas être étiqueté i : contradiction. On a donc bien prouvé la caractérisation des ensembles F_i .

(c) Détermination de σ sur B_n , $n > 0$ (le cas $n = 0$ se déduit du e).

F_n est stable par $\bar{\sigma}$ (cf. démonstration du Lemme 1) et $\bar{\sigma}^{-1} = \hat{\sigma}^{-1}$ sur F_n . On note dans la suite $\Lambda_n = \bar{\sigma}^*(F_n) = F_n$.

$$\sigma|_{B_n}^{-1} = T_{S_n, F_n}(\hat{\sigma}|_{S_n}^{-1}, -\bar{\sigma}^{-1}).$$

Ceci découle du lemme technique si l'on vérifie que $\sigma^{-1} = -\bar{\sigma}^{-1}$ n'a pas de cycle dans F_n .

Si σ^{-1} (et donc σ) avait un cycle dans F_n ($n > 0$) cela impliquerait que tous les brins d'un sommet de la carte sont dans $\bigcup_{i>0} F_i$, ce qui n'est pas possible (cf. démonstration du Lemme 2).

(d) Détermination de σ sur B_i , $i > 0$, σ étant supposée déjà déterminée sur $\bigcup_{j>i} B_j$ et $\bar{\sigma}$ sur $\bigcup_{j>i} \Lambda_j$, avec $\Lambda_j = \bar{\sigma}^* F_j$.

(i) Pour déterminer $\Lambda_i = \bar{\sigma}^*(F_i)$, on remarque que de par la définition de F_i , on a $\Lambda_i = F_i \cup A_i$ avec A_i inclus dans $C_i = \bigcup_{j>i} B_j \setminus \bigcup_{j>i} \Lambda_j$ (du fait que $\bar{\sigma}$ sature $\bigcup_{j>i} \Lambda_j$).

L'algorithme suivant détermine pour tout brin b de C_i s'il est ou non dans A_i .

E : Soit b dans C_i . On pose $\tilde{b} = \bar{\sigma}^{-1}b = -\sigma^{-1}(b)$ (σ^{-1} est connu sur $\bigcup_{j>i} B_j$).

- Si \tilde{b} est dans F_i , alors b appartient à A_i .
- Si \tilde{b} est dans C_i , alors on recommence avec \tilde{b} (aller en E).
- Si \tilde{b} n'appartient pas à $F_i \cup C_i$ alors il est dans S_i et donc b n'appartient pas à A_i .

Remarque 4. On ne peut pas avoir de cycle pour $\bar{\sigma}^{-1}$ (donc pour $\bar{\sigma}$) dans C_i ; ce cycle serait une face f de la carte dont tous les brins auraient une étiquette supérieure ou égale à $i + 1$: soit $m(f) \geq i + 1$. Donc, les brins étiquetés par $m(f)$ dans cette face devraient appartenir à $F_{m(f)}$, ce qui n'est pas puisque $C_i \cap F_{m(f)}$ est vide. Par suite, l'algorithme ci-dessus termine.

(ii) On a $\bar{\sigma}|_{\Lambda_i}^{-1} = T_{F_i, A_i}(\hat{\sigma}|_{F_i}^{-1}, -\sigma^{-1})$;

– σ^{-1} n'a pas de cycle sur A_i par définition même de A_i .

(iii) On a $\sigma|_{B_i}^{-1} = T_{S_i, F_i}(\hat{\sigma}|_{S_i}^{-1}, -\bar{\sigma}^{-1})$;

– $\bar{\sigma}^{-1}$ n'a pas de cycle sur F_i (cf. (c)).

(e) Détermination de σ sur $B_0 = F_0$.

Les points (i) et (ii) du cas général (cf. (d)) sont inchangés. On conclut avec $\sigma|_{B_0}^{-1} = -\bar{\sigma}^{-1}$ sur B_0 .

On a donc prouvé l'injectivité recherchée.

(2) La surjectivité de l'application qui à une carte planaire associe un arbre bien étiqueté résulte du fait que ces deux ensembles sont en bijection (cf. [1]). On peut également la prouver directement à l'aide des formules de reconstruction de σ à partir de $\hat{\sigma}$ établies au (1). \square

3. Bijection entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés

3.1. Définitions

On note $Z_m^+ = Z_m \cap \mathbb{N}$ et $Z_m^- = Z_m \cap (-\mathbb{N})$. Une *hypercarte* est un couple (σ, a) de permutations opérant sur Z_m^+ (ensemble des brins), tel que le groupe engendré par $\{\sigma, a\}$ opère transitivement. Les *orbites* de σ (resp a , $a^{-1}\sigma$) sont les sommets (resp arêtes, faces) de l'hypercarte.

Le genre de l'hypercarte (σ, a) sur Z_m^+ est défini par

$$g(\sigma, a) = 1 + \frac{1}{2}(m - Z(\sigma) - Z(a) - Z(a^{-1}\sigma)).$$

Le *genre* d'une hypercarte est un entier positif ou nul. S'il est nul, l'hypercarte est dite planaire.

Hypercarte planaire pointée

Deux hypercartes planaires (σ, a) et (σ', a') sur Z_m^+ sont isomorphes, s'il existe une permutation λ sur Z_m^+ telle que

$$\lambda(1) = 1, \quad \lambda\sigma = \sigma'\lambda, \quad \lambda a = a'\lambda.$$

Une hypercarte planaire pointée est une classe d'équivalence modulo cet isomorphisme. Le brin 1 et son sommet initial sont dits pointés.

3.2. Représentation d'une hypercarte par une carte

On rappelle ci-dessous, dans nos notations et de façon à décrire complètement la bijection entre hypercartes planaires pointées et arbres très bien étiquetés pointés, la représentation d'une hypercarte par une carte bipartie, donnée par Walsh (cf. [3]). Voir l'exemple en fin de paragraphe.

Proposition 1. (1) Soit $H = (\sigma, a)$ une hypercarte planaire sur Z_m^+ . On définit la permutation p sur Z_m par

$$p = \alpha \circ a^{-1} \circ \sigma \circ \alpha \text{ sur } Z_m^- \text{ et } p = a \text{ sur } Z_m^+,$$

où α est définie sur Z_m par $\alpha(b) = -b$. Alors $C = (p, \alpha)$ est une carte planaire sur Z_m , telle que p sature Z_m^+ et Z_m^- .

(2) L'application définie au (1) est une bijection, notée θ , de l'ensemble \mathcal{H}_m des hypercartes planaires, sur Z_m^+ , sur l'ensemble \mathcal{C}_m des cartes planaires (p, α) sur Z_m telles que p sature Z_m^+ et Z_m^- .

Démonstration

(1) (i) C'est une carte. En effet sur Z_m^+ , on a $a = p$ et $\sigma = (p \circ \alpha)^2$. Donc pour tous b_1 et b_2 dans Z_m^+ , il existe un élément g du groupe engendré par $\{p, \alpha\}$ tel que $b_2 = g(b_1)$. On en déduit la transitivité de ce groupe.

(ii) La carte $C = (p, \alpha)$ est planaire. En effet:

- $Z(p) = Z(a) + Z(a^{-1}\sigma)$ (évident par la définition de p),
- \bar{p} est une permutation de Z_m qui échange Z_m^+ et Z_m^- . De plus, sur Z_m^+ , $\bar{p}^2 = \sigma$. Donc $Z(\bar{p}) = Z(\bar{p}|_{Z_m^+}) = Z(\sigma)$.

On en déduit que $g(p, \alpha) = \frac{1}{2}\{m + 2 - Z(p) - Z(\bar{p})\} = g(\sigma, a) = 0$. Donc la carte C est planaire.

(iii) Le fait que p sature Z_m^+ et Z_m^- est évident par la définition de p .

(2) L'application réciproque de θ associe à toute carte (p, α) de \mathcal{C}_m , l'hypercarte (σ, a) définie sur Z_m^+ par

$$a = p|_{Z_m^+} \quad \text{et} \quad \sigma = (\bar{p}^2)|_{Z_m^+}$$

La transitivité du groupe engendré par $\{\sigma, a\}$ et la nullité du genre de cette hypercarte se déduisent de celles de (p, α) . \square

Soit $\tilde{\mathcal{C}}_m$ l'ensemble quotient de \mathcal{C}_m par la restriction à \mathcal{C}_m de la relation d'équivalence introduite au (1.4).

Proposition 2. (1) $\tilde{\mathcal{C}}_m$ peut être caractérisé comme l'ensemble des cartes planaires pointées dont l'ensemble des sommets est partagé en deux familles de sommets, deux sommets adjacents n'appartenant pas à la même famille (propriété compatible avec la relation d'équivalence).

(2) L'ensemble \mathcal{H}_m des hypercartes planaires pointées à m brins est en bijection avec l'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}_m$. On note $\tilde{\theta}$ cette bijection.

Démonstration. (1) Pour une carte de \mathcal{C}_m , les deux types de sommets sont respectivement définis par les cycles de p dans Z_m^+ et par les cycles de p dans Z_m^- . Deux sommets du même type n'étant pas adjacents. La classe d'équivalence d'une carte de \mathcal{C}_m vérifie donc la propriété annoncée.

Réciproquement, dans une carte planaire pointée telle que deux sommets adjacents n'appartiennent pas à la même famille, il y a autant de brins issus d'un type de sommets que de l'autre. On étiquette par les éléments de Z_m^+ les brins issus des sommets du même type que le sommet pointé (le brin pointé étant étiqueté 1). Les autres brins étant d'office étiquetés par Z_m^- , la carte combinatoire ainsi définie est bien dans \mathcal{C}_m .

(2) Il reste à vérifier que la bijection θ (cf. Proposition 1) passe au quotient, donnant le résultat annoncé.

- Si H_1 et H_2 sont deux hypercartes isomorphes par la permutation λ sur Z_m^+ , $\theta(H_1)$ et $\theta(H_2)$ sont isomorphes par la permutation φ sur Z_m définie par $\varphi = \lambda$ sur Z_m^+ , $\varphi = \alpha \circ \lambda \circ \alpha$ sur Z_m^- . Donc θ passe au quotient définissant une application $\tilde{\theta}$ de $\tilde{\mathcal{H}}_m$ sur $\tilde{\mathcal{C}}_m$.
- Réciproquement, si φ est une permutation sur Z_m rendant isomorphes C_1 et C_2 deux cartes dans \mathcal{C}_m , alors φ sature Z_m^+ et Z_m^- et $\varphi|_{Z_m^+}$ est un isomorphisme entre $\theta^{-1}(C_1)$ et $\theta^{-1}(C_2)$. Donc $\tilde{\theta}$ est injective. \square

3.3. Théorème fondamental

Théorème 2. *L'application qui a une hypercarte planaire pointée \tilde{H} associe l'arbre bien étiqueté pointé $\tilde{T}(\tilde{\theta}(\tilde{H}))$ associé à la carte planaire pointée $\tilde{\theta}(\tilde{H})$ est une bijection de l'ensemble des hypercartes planaires pointées sur l'ensemble des arbres très bien étiquetés pointés. Le nombre de brins dans l'arbre est double de celui de l'hypercarte planaire associée.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que \tilde{T} met en bijection $\tilde{\mathcal{C}}_m$ et l'ensemble des arbres très bien étiquetés à m arêtes. Cela résulte de la définition de la fonction ε qui étiquette les sommets d'une carte C de \mathcal{C}_m ; les sommets de la famille du sommet pointé seront étiquetés pairs et les autres impairs. Par suite toute arête dans $\tilde{\mathcal{C}}_m$ étant incidente à deux sommets de types différents aura ses brins étiquetés pair pour l'un, impair pour l'autre. L'arbre associé sera donc très bien étiqueté. La réciproque est évidente. \square

Exemple. Considérons l'hypercarte planaire (σ, a) (représentée en traits pleins ci-dessous) définie sur Z_{10}^+ par

$$\begin{aligned}\sigma &= (1)(2)(3, 5)(4, 10, 7, 8)(6, 9), \\ a &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10).\end{aligned}$$

On lui associe la carte planaire (p, α) (représentée en traits pointillés) définie sur Z_{10} par

$$\begin{aligned}p &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10)(-1, -4, -9, -5, -2) \\ &\quad (-3, -8)(-6, -10)(-7).\end{aligned}$$

On étiquette les sommets de cette carte par la notion de distance ε indiquée au Paragraphe 2. (cf. Fig. 3). L'arbre très bien étiqueté $(\hat{\sigma}, \alpha; \varepsilon)$ est alors

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= (1)(2)(3)(4)(-5)(-3, -8)(8, 5, 6, 7)(-7) \\ &\quad (-6, -10)(10, 9)(-1, -4, -9, -2).\end{aligned}$$

Remarque 5. Considérons les deux opérations géométriques suivantes.

- La première consiste à insérer un sommet au 'milieu' de toute arête d'une carte planaire pointée et transforme de façon évidente cette carte planaire pointée

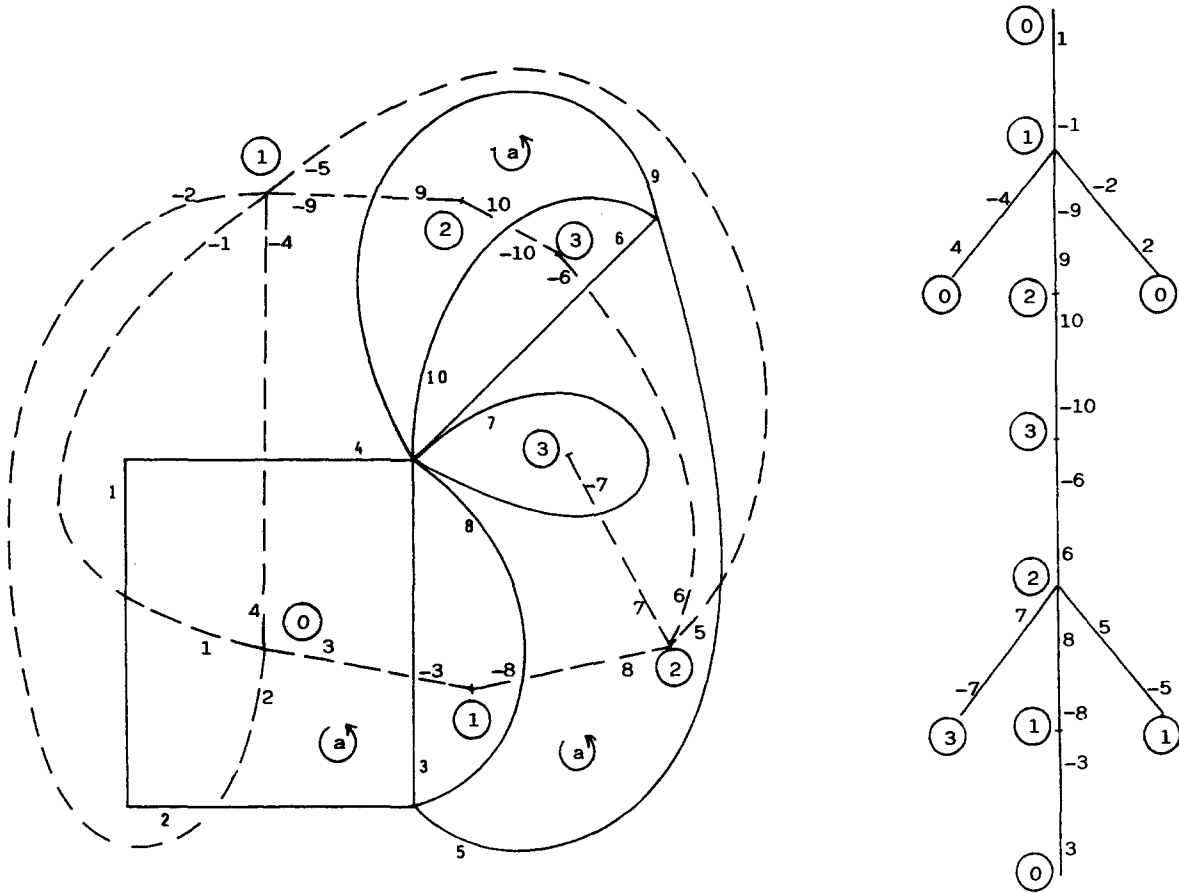


Fig. 3

en une carte planaire pointée bipartie (c'est à dire en une hypercarte planaire pointée, en appliquant $\tilde{\theta}$).

– Dans la seconde, on multiplie les étiquettes d'un arbre bien étiqueté par deux et l'on insère au 'milieu' de chaque arête de l'arbre, un sommet auquel on donne l'étiquette impaire intermédiaire (resp. immédiatement supérieure) aux étiquettes paires de son père et de son fils dans l'arbre, si celles-ci sont différentes (resp. égales). On associe ainsi à tout arbre bien étiqueté pointé un arbre très bien étiqueté pointé.

Intuitivement, la bijection \tilde{T} recherchée entre cartes planaires pointées (resp. hypercartes planaires pointées considérées comme cartes planaires pointées biparties), et arbres bien étiquetés pointés (resp. très bien étiquetés pointés), devait commuter avec les deux transformations géométriques ci-dessus. Or, ajouter un sommet au milieu de chaque arête d'une carte planaire pointée a pour effet de multiplier par deux les distances des sommets initiaux de la carte au sommet pointé. Tout sommet inséré est alors à distance impaire, intermédiaire ou immédiatement supérieure aux distances paires des extrémités de l'arête dont il est le 'milieu', suivant que ces dernières sont différentes ou égales. On constate donc que, par cette opération d'insertion de sommets, la modification de la fonction distance dans la carte est identique à la modification attendue de la fonction d'étiquetage de l'arbre.

C'est partir de cette constatation qu'a été imaginée la bijection \tilde{T} associée à l'étiquetage de la carte utilisant la notion de distance.

Bibliographie

- [1] R. Cori et B. Vauquelin, Planar maps are well labeled trees, *Canad. J. Math.* 33(5) (1981) 1023–1042.
- [2] R. Cori, Un code pour les graphes planaires et ses applications, *Astérisque* 27, SMF.
- [3] T.R.S. Walsh, Hypermaps versus bipartite maps, *J. Combin. Theory Ser. B*, 18 (1975) 155–163.